ALGEBRA LINEARE

DOCENTE: Francesca Acquistapace
email: acquistF@dm.unipi.it
Ricevim.: sabato
libro di testo: brani scelti da
M. ABATE "Algebra lineare"
M. C. GROW
Ricevim. martedì 11-13:00 d.m.
+ sabato 12:30-13:00 F6

26/09/15
No 11-18

Sistemi lineari

Presi $a, b \in \mathbb{R}$ $\boxed{ax=b}$

Diramazioni:

- $a \neq 0$ c'è un'unica soluzione $\Rightarrow x = a^{-1}b$
- $a = 0$, $0 \cdot x = b$
  - $b = 0$: ogni x è soluzione
  - $b \neq 0$: nessuna soluzione

MASTER COPY PISA

Trappola:

$(a^2-1)z = a^2-1$

$(\cos\frac{\alpha}{2} + x^2 - y + \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}) = \dots$

Se sappiamo che $f(\alpha, x, y, \beta) \neq 0$ possiamo semplificare e dire $z=1$.

Se non lo sappiamo — $f(\ ) \neq 0 \to z = 1$
$f(\ ) = 0 \to$ ogni z è soluzione

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

N.B. I sistemi lineari possono avere p equazioni e Q incognite.
Scriviamo un sistema qualunque:

(es)
$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x+y+4z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$$

soluzione = terna di numeri

Sto cercando una terna $(x,y,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ -3y+3z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

È equivalente perché la 2ª eq. è conseguenza di 2 sopra e le altre che le avevo. (Non perdo soluzioni)

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3(y+z)=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$3 \neq 0$ — uguali

Metto in evidenza il 3. Essendo $3 \in \mathbb{R}, \in \neq 0$ perciò posso semplificare.
Posso eliminare 2 eq. uguali, trasf. il sistema di 3 incognite in un sistema di 2.

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Scelgo una variabile

$$\begin{cases} x = 1+z-2z = 1-3z \\ y = -z \end{cases}$$

Il sistema ha ∞ soluzioni a seconda del valore di z.

Il sistema ha <u>infinite</u> soluzioni dipendenti da z.

es. 2) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x-2y+4z=7 \\ x-2y+2z=3 \end{cases}$ $\xrightarrow{-2}$

$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x-2y+4z=7 \\ \quad 2z=4 \end{cases}$

$\begin{cases} x+2y=1-2=-1 \\ x-2y+8=7 \\ z=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-1-2y \\ x-2y=-1 \\ z=2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=-1-2y \\ -x-2y-2y=-1 \\ z=2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=-1-2y \\ -4y=0 \\ z=2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$ una soluzione

es. 3) $\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ x-2y+4z=7 \\ x-2y+2z=3 \end{cases}$ $\xrightarrow{-}$ $\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ x-2y+4z=7 \\ z=2 \end{cases}$ $\xrightarrow{-}$ $\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ 2z=6 \\ z=2 \end{cases}$ $\not\downarrow \neq$ nessuna soluzione

Noi abbiamo lavorato sui coeff. di x, y, z

Nominiamo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pq}x_q = b_q \end{cases}$$

Sistema lineare (cioè di 1° grado)

a = coefficienti
x = variabili (da trovare)
b = termine noto

(P righe quante i t.n.)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

riga

colonna

MATRICE dei coefficienti

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$ colonna delle variabili

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$ colonna dei termini noti

ogni colonna è una lista p di num. $\mathbb{R}$

Il sistema diventa $AX = b$

x è soluzione $\Leftrightarrow$ $b = x_1A^1 + x_2A^2 + \dots + x_qA^q$

b è combinazione lineare di $A^1, \dots, A^q$

Si chiamano sistemi omogenei quando la colonna dei t.n. è 0, ovvero:

quando $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ c'è sempre soluzione $x_1 = x_2 = \dots = x_q = 0$

es. Matrice del sistema 2

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$$ OK

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 68 37745

Possiamo effettuare 2 tipi di operazioni:

1ª operazione ammissibile: → (cioè prima e dopo la "cura" / operazione, le soluzioni sono le stesse).

↓

SCAMBIARE LE EQUAZIONI
(cioè scriverle in un altro ordine, permutarle)

2ª operazione ammissibile:

MOLTIPLICARE PER UN NUMERO $\neq 0$

(Attenzione alle trappole, es. funzioni)

3ª operazione ammissibile:

SOMMARE AD UNA EQUAZIONE IL MULTIPLO DI UN'ALTRA EQUAZIONE
(es. al posto di una eq. scrivo la somma di questa con la 1ª o la 3ª ecc.)

es. $\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{iq}x_q = b_i \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jq}x_q = b_j \\ \vdots \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ (equivalente) $\begin{cases} \vdots \text{ (uguali)} \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{iq}x_q = b_i \\ (a_{j1} + Ka_{i1})x_1 + \dots + (a_{jq} + Ka_{iq})x_q = b_j + Kb_i \end{cases}$

Passo aggiungere questa riga ($II^a r \to II^a r + KI^a r$) $\neq 0$

$$(A, b) \to \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} & b_q \end{array}\right)$$

MATRICE completa del sistema

Usiamo la notazione $AX = b$, lascio perdere la X e scrivo la matrice (A, b). Lo scopo è di ridurre la matrice a scala.

↓

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

$$\left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & a_{qq} \end{array}\right)$$

Esempio:

$$(A, b): \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 23 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ -7 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Portiamo a prima posizione un'equaz. che ha il coeff. $x_1 \neq 0$.

$r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 23 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ -7 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

(3ª operaz.: sottraggo la 1ª moltiplicata per il 3° coeff.)

$r_3 - 23r_1$
$r_4 + 7r_1$
$r_5 - 2r_1$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -22 & -69 & 1 & -26 & 1 \\ 0 & 8 & 25 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Aggiungiamo un multiplo di r_2 affinché la 2ª colonna vada a 0

$r_3 + 22r_2$
$r_4 - 8r_2$
$r_5 + r_2$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -91 & 1 & -92 & 23 \\ 0 & 0 & 33 & -1 & 32 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -8 & 2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[r_3 \to r_5,\ r_4 \to r_3,\ r_5 \to r_4]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & -91 & 1 & -92 & 23 \\ 0 & 0 & 33 & -1 & 32 & -8 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[r_5 + 33 r_3]{r_4 - 91 r_3}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 638 & 636 & -159 \\ 0 & 0 & 0 & -232 & -232 & 58 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{r_5 \div (-232)} \begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \xleftrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_5}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 638 & 636 & -159 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{r_5 - 638 r_4} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -7 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Adesso risolvo con il sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z + w = 0 \\ y - z - 3w = 1 \\ -z - 7v - 8w = 2 \\ +v + w = -\frac{1}{4} \\ -2w = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x + \frac{7}{4} + 0 - \frac{1}{4} = 0 \to x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \\ y + 0 - \frac{3}{4} = 1 \to y = \frac{7}{4} \\ -z + 0 + 2 = 2 \to z = 0 \\ v - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \to v = 0 \\ w = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{7}{4} \\ z = 0 \\ v = 0 \\ w = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

www.ripetizioni.it 080/8312135 328/1983745

30/09/15

Operazioni invertibili → stesse soluzioni

Matrice con parametro:

es.1) $\begin{cases} x+(a+1)y+2z=0 \\ -y+z=0 \\ x-ay=b \end{cases}$ (Sistema di Gauss)

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -a & 0 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2a-1 & -2 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-(2a+1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a-3 & b \end{array}\right)$$

- se $-2a-3\neq 0 \Rightarrow \exists!$ soluzione (esiste una sola soluzione) (quindi si può dividere)

Ritrasformo nel sistema:

$$\begin{cases} x+(a+1)y+2z=0 \\ -y+z=0 \\ (-2a-3)z=b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2z-(a+1)y=\dfrac{2b}{3+2a}+\dfrac{(a+1)b}{2a+3} \\ y=z=\dfrac{-b}{3+2a} \\ z=\dfrac{-b}{3+2a} \end{cases}$$ (soluzioni parametrizzate da z)

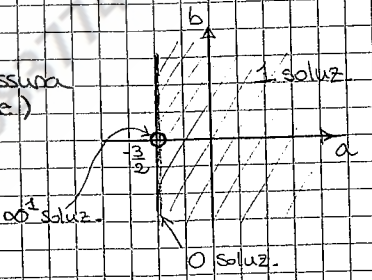
- se $-2a-3=0$ cioè $a=-3/2$, la terza equazione dice:

$0\cdot z=b$

$b=0$: abbiamo ∞ (infinite) soluzioni dipendenti da z. Scelto $z=z_0$, la soluz. è

$$\begin{cases} x=-2z_0-(-\frac{3}{2}+1)z_0=-\frac{1}{2}z_0 \\ y=z_0 \\ z=z_0 \end{cases}$$

$b\neq 0$: $\nexists$ soluzione (non esiste nessuna soluzione)



es.2) $\begin{cases} 2x+6y+5z+t=2 \\ x+4y+3z+2t=0 \\ x+2y+2z-t=2 \\ 3x+8y+7z=4 \end{cases}$

Risolvere il sistema per casa e aggiungere un'equazione t.c. $\nexists$ soluzioni (es. una stessa equaz. cambiando il termine noto) (es. $2x+6y+5z+t=5$)

es.3) $\begin{cases} x+ay+a^2z=1 \\ x+ay+abz=a \\ bx+a^2y+a^2bz=a^2b \end{cases}$

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & a & ab & a \\ b & a^2 & a^2b & a^2b \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-bR_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & ab-a^2 & a-1 \\ 0 & a^2-ba & 0 & b(a^2-1) \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & a(a-b) & 0 & b(a^2-1) \\ 0 & 0 & a(b-a) & a-1 \end{array}\right)$$

- se $a(a-b)\neq 0$ $\exists!$ soluzione → (come prima)

Se i numeri sulla diagonale della matrice sono tutti $\neq 0$ (e in questo caso si chiamano Pivot) esiste un'unica soluzione.